Beweis der Summe der Reihe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$ *

Leonhard Euler

Die Methode, die ich in den "Commentaires de l'Académie de Pétersbourg" vorgestellt habe, um die Summe dieser Reihe

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{etc.}$$

zu finden, wenn der Exponent n eine gerade Zahl ist, ist etwas Außergewöhnliches, weil sie aus einem Prinzip abgeleitet ist, von dem man bei Untersuchungen dieser Art bisher kaum Gebrauch gemacht hat. Sie ist indes ebenso sicher und fundiert wie jede andere Methode, die man gewöhnlich bei der Summation von unendlichen Reihen anwendet. Dies habe ich unter Anderem durch die vollkommene Übereinstimmung einiger bereits bekannter Fälle und mittels Approximationen gezeigt, welche uns stets eine einfache Möglichkeit bieten, die Wahrheit an der Praxis zu prüfen. Aber es scheint zusätzlich so zu sein, dass diese Methode einen immensen Vorteil mit sich bringt, da sie uns gleichzeitig zur Kenntnis einer unendlichen Anzahl an Reihen geleitet hat, deren Summe bisher unbekannt waren, wohingegen die üblichen Methoden für uns kaum etwas über diese Arten von Reihen aufzeigen. Mehrere Geometer schenkten dieser Entdeckung ihre Aufmerksamkeit, indem sie nach einem Beweis für den Fall $n = 2$ suchten, in welchem ich dann festgestellt habe, dass die Summe dieser Reihe

*Originaltitel: "Démonstration de la somme de cette suite $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \cdots$", zuerst publiziert in: *Journal litteraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord, Band 2* (1743, geschrieben 1741): pp. 115 – 127, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 14, pp. 177 – 186, Eneström Nummer E63, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\text{etc.}$$

dem sechsten Teil eines Viertels des Umfangs des Kreises gleich ist, dessen Durchmesser $= 1$ ist. Dieser Fall erschien zunächst umso bemerkenswerter, weil der mittlerweile verstorbene Jacques Bernoulli, nachdem er vergebens danach gesucht hatte, ihn für eine wichtigen Baustein hielt, um die Theorie der unendlichen Reihen zu vervollkommnen.

Ich werde hier nun eine Methode mitteilen, die sich vollkommen von der unterscheidet, mit welcher ich zuvor zum Ziel gelangt war, und welche uns mittels Integrationen die Summe der genannten Summe liefert; welche allerdings nur in diesem einen Fall verwendet werden darf, sodass die Summation der höheren Potenzen, allem Anscheine nach, nur mit meiner ersten Methode vollführt werden kann. Diese spezielle Methode, die ich hier erläutern will, kann jedoch zur weiteren Bestätigung der allgemeinen Methode diesen als um die große Schwierigkeit, ja fast schon Unmöglichkeit, aufzuzeigen, wenn $n = 4$ oder 6 oder andere beliebige gerade Zahl ist, wenn man nach den in der Reihenlehre gebräuchlichen Methoden arbeiten wollte.

Ich betrachte also einen Kreis mit Radius $= 1$, von welchem ich einen beliebigen Bogen $= s$ nehme, dessen Sinus $= x$ sei; weiter wird man aus der Natur des Kreises $ds = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ und $s = \int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ haben. Wenn wir nun $x = 1$ setzen, wird der Bogen s dem des Viertelkreises gleich sein, das heißt, wenn wir das Verhältnis des Durchmessers zum Umgang $1 : \pi$ setzen, wird der Bogen s gleich $= \frac{\pi}{2}$ sein oder dem Fall entsprechen, in welchem $x = 1$ ist. Es ist ersichtlich, dass ich den Buchstaben π hier verwende, um die von Ludolf von Keulen zu $3,159159256$etc. berechnete Zahl anzuzeigen. Nun sei die Differentialformel $sds = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ vorgelegt, deren Integral $= \frac{ss}{2}$ ist, und wenn man nach der Integration $x = 1$ werden lässt, ist das Integral $= \frac{\pi\pi}{8}$. Wir suchen nun mit der üblichen Methode das Integral von $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ und transformieren das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ mit den bekannten Regeln in eine unendliche Reihe, und wir erhalten:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = x + \frac{1}{2\cdot 3}x^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9}x^9 + \text{etc.}$$

Diese Reihe, anstelle von $\int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ eingesetzt, wird

$$sds = \frac{xdx}{\sqrt{1-xx}} + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{x^3dx}{\sqrt{1-xx}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\frac{x^5dx}{\sqrt{1-xx}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\frac{x^7dx}{\sqrt{1-xx}}$$

$$+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 9}\frac{x^9dx}{\sqrt{1-xx}} + \text{etc.}$$

geben. Von dieser Reihe ist jeder Term absolut integrierbar, denn das Integral des ersten Terms ist so genommen, dass es für $x = 0$ gesetzt verschwindet, $1 - \sqrt{1-xx}$, genau wie es die Natur der Sache verlangt, nach welcher das Integral von sds verschwinden soll, wenn man $x = 0$ setzt. Da der erste Term integrierbar ist, sind gleichermaßen auch alle folgenden integrierbar, weil die Integration eines jeden Terms sich auf die Integration des vorherigen reduziert. Man wird dies deutlich erkennen, wenn man bedenkt, dass im Allgemeinen freilich gilt:

$$\int \frac{x^{n+2}dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{n+1}{n+2}\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-xx}} - \frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{1-xx}.$$

Da wir nun nur das Integral von sds im Fall $x = 1$ suchen, setzen wir im Term $-\frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{1-xx}$, welcher algebraisch ist, $x = 1$, und wir erhalten für diesen Fall die folgende allgemeine Reduktion

$$\int \frac{x^{n+2}dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{n+1}{n+2}\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1-xx}}.$$

Daher entnehmen wir die Integrale aller Terme unserer Reihe für den Fall $x = 1$ wie es in der folgenden Tabelle zu sehen ist:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-xx}} = 1 - \sqrt{1-xx} \;\; = 1 \quad (\text{für } x = 1)$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2}{3}\int \frac{xdx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2}{3},$$

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{4}{5}\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5},$$

$$\int \frac{x^7dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{6}{7}\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7},$$

$$\int \frac{x^9dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{8}{9}\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}$$

und so weiter

Aber nach der für *sds* angegebenen Reihe haben wir die Integration

$$\frac{ss}{2} = \int \frac{xdx}{\sqrt{1-xx}} + \frac{1}{2\cdot 3}\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-xx}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-xx}} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\int \frac{x^7dx}{\sqrt{1-xx}} + \text{etc.}$$

als $= \frac{\pi^2}{8}$ ermittelt, nachdem wie zuvor $x = 1$ gesetzt worden ist, in welchem Fall natürlich $s = \frac{\pi}{2}$ wird, wie wir ja bereits gesehen haben. Wir haben lediglich jedes Integrals mit seinem numerischen Koeffizienten zu multiplizieren, um die Reihe

$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 5} + \frac{1}{7\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 9} + \text{etc.}$$

zu finden, welche in den Nennern nur die Quadrate der ungeraden Zahlen enthält, die Zähler bleiben dagegen durchgehend der Einheit gleich. Die Summe dieser Brüche, fortgesetzt bis ins Unendliche, wird demnach gleich $\frac{\pi\pi}{8}$ sein, was gerade das ist, was ich mit meiner allgemeinen Methode für diese Summe gefunden habe. Daher werden wir nun ohne Mühe die Summe dieser Reihe

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

ableiten, aus welcher, wenn man von ihrer den vierten Teil wegnimmt, welcher

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\text{etc.}$$

ist, alle geraden Quadrate herausgehen, und wir werden diese haben

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\text{etc.},$$

welche als logische Konsequenz drei Viertel der anderen

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\text{etc.}$$

enthält, sodass wir für die Summation von ersterer

$$\frac{\pi\pi}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\text{etc.}$$

haben, genauso wie ich sie mit einer anderen allgemeinen Methode in den "Commentaires de l'Académie imp. de Pétersbourg au Tome VII" zu finden gelehrt habe.

Während wir auf diese Art zu der Summe der ungeraden Quadrate

$$\frac{\pi\pi}{8}=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+\text{etc-}$$

gelangt sind, aus welcher wir in gerechtfertigter Weise die Summe aller Quadrate

$$\frac{\pi\pi}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\text{etc.}$$

abgeleitet haben, kann ich auch auf eine andere Weise direkt diese Summe finden, deren Summe $\frac{3}{4}$ von jener umfasst: Zu diesem Zweck suche ich nach einer anderen geeigneten Reihe, welche für mich das das Integral von $\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ allgemein für einen beliebigen Wert des Sinus von x ausdrückt. Dafür setze ich $dy=\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$, woraus ich die Gleichung

$$dy\sqrt{1-xx}=dx\int\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$$

erhalte, welche für konstant festgelegtes dx differenziert

$$ddy(1-xx) - xdxdy = dx^2$$

geben wird. Diese Gleichung, freilich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, ist überaus geeignet, um den Wert von y mit einer Reihe auszudrücken, welche nach den Potenzen von x fortschreitet. Um diese Reihe zu finden, wollen wir folgenden nützlichen Ansatz machen:

$$y = \alpha xx + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 + \varepsilon x^{10} + \text{etc.},$$

wo wir mit dem Quadrat von x beginnen, weil wir aus der Gleichung $dy = \frac{dx}{\sqrt{1-xx}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ erkennen, dass für unendlich kleines x die Größe y gleich xdx wird und daher $y = xx$ ist. Danach lassen wir die Exponenten von x in Zweierschritten wachsen, weil die Differenzen-Differentialgleichung

$$ddy(1-xx) - xdxdy = dx^2$$

x und dx insgesamt zwei Dimensionen auffüllen. Aus dieser angenommenen Gleichung entnehmen wir

$$\frac{dy}{dx} = 2\alpha x + 4\beta x^3 + 6\gamma x^5 + 8\delta x^7 + \text{etc.}$$

und durch nochmaliges Differenzieren für als konstant festgelegtes dx

$$\frac{ddy}{dx^2} = 2\alpha + 3 \cdot 4 \cdot \beta x^2 + 5 \cdot 6 \cdot \gamma x^4 + 7 \cdot 8 \cdot \delta x^6 + \text{etc.}$$

Wenn wir die Differenzen-Differentialgleichung durch dx^2 teilen, finden wir

$$\frac{ddy}{dx^2} - \frac{xxddy}{dx^2} - \frac{xdy}{dx} - 1 = 0,$$

welche, nach Einsetzen der gefundenen Werte für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{ddy}{dx^2}$ ergibt:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} +\,2\alpha & +\,3\cdot 4\beta x^3 & +\,5\cdot 6\gamma x^4 & +\,7\cdot 8\delta x^6 & +\text{ etc.} \\ & -\,2\alpha x^2 & -\,3\cdot 4\beta x^4 & -\,5\cdot 6\gamma x^6 & -\text{ etc.} \\ & -\,2\alpha x^2 & -\,4\beta x^4 & -\,6\gamma x^6 & -\text{ etc.} \end{array}\right\} = 1$$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{2} && = \frac{1}{2}\\
\beta &= \frac{2\cdot 2\cdot \alpha}{3\cdot 4} && = \frac{2\cdot 2}{2\cdot 3\cdot 4}\\
\gamma &= \frac{4\cdot 4\cdot \beta}{5\cdot 6} && = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\\
\delta &= \frac{6\cdot 6\cdot \gamma}{7\cdot 8} && = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\\
\varepsilon &= \frac{8\cdot 8\cdot \delta}{9\cdot 10} && = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}
\end{aligned}
$$

etc.

Wenn man diese Zahlen gefunden hat, hat man

$$y = \frac{ss}{2} = \frac{xx}{2} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{4} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\frac{x^5}{6} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\frac{x^8}{8} + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\frac{x^{10}}{10} + \text{etc.}$$

Nun suchen wir vermöge der Reihe, indem wir sie mit $ds\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$ multiplizieren, das Integral von $\frac{ssds}{2}$, welches

$$\frac{s^3}{6} = \frac{1}{2}\int\frac{xxdx}{\sqrt{1-xx}} + \frac{2}{3\cdot 4}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-xx}} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 6}\int\frac{x^6dx}{\sqrt{1-xx}} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 8}\int\frac{x^8dx}{\sqrt{1-xx}} + \text{etc.}$$

ist, und nehmen diese Integrale allein im Fall $x = 1$, in welchem wir

$$s = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \frac{s^3}{6} = \frac{\pi^3}{48}$$

erhalten. Aber all diese Integrale reduzieren sich durch die angegebene allgemeine Reduktion auf dieses $\int\frac{dx}{\sqrt{1-xx}}$, welches im Fall $x = 1$ gerade $= \frac{\pi}{2}$ wird und folglich werden die anderen sein:

$$
\begin{aligned}
\int\frac{xxdx}{\sqrt{1-xx}} &= \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},\\
\int\frac{x^4dx}{\sqrt{1-xx}} &= \frac{3}{3}\int\frac{xxdx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2},\\
\int\frac{x^6dx}{\sqrt{1-xx}} &= \frac{5}{6}\int\frac{xxdx}{\sqrt{1-xx}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2},
\end{aligned}
$$

etc.

Wir multiplizieren jedes Integral mit seinem Koeffizienten, welcher ihm in der $\frac{s^3}{6}$, oder in unserem Fall $\frac{\pi^3}{48}$, gleichen Reihe zukommt, und wir erhalten

$$\frac{\pi^3}{48} = \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{6 \cdot 6} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{8 \cdot 8} \cdot \frac{\pi}{2} + \text{etc.}$$

Wir teilen jetzt beide Seiten durch $\frac{\pi}{2}$ und multiplizieren sie mit 4, was

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

geben wird, sodass wir zu der Summe dieser Reihe gelangt sind, ohne sie aus der anderen

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.}$$

erschließen zu müssen. Diese zwei Methoden, so leicht wie sie sind, verdienten umso größere Aufmerksamkeit, wenn sie auch angewandt werden könnten, um die Summen höherer gerader Potenzen zu entdecken, welche alle aus meiner allgemeinen Methode, welche aus der Betrachtung der Wurzeln einer unendlichen Gleichung abgeleitet worden ist, zu finden. Aber trotz aller Mühen, welche ich aufgebracht hatte, um auch nur die Summe der Biquadrate

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.}$$

zu ermitteln, konnte ich den Erfolg bei der Suche nicht wiederholen, obschon die Summe mir aus der anderen Methode bekannt ist, und zwar ist sie $= \frac{\pi^4}{90}$. Um den Aufwand zu verringern, welche andere bei diesem Gegenstand auf sich nehmen werden, werde ich die Summe aller geraden Potenzen, welche ich mit der anderen Methode gefunden habe, hier beifügen.

$$
\begin{aligned}
1+\frac{1}{2^{2}}+\frac{1}{3^{2}}+\frac{1}{4^{2}}+\frac{1}{5^{2}}+\text{etc.}&=\frac{2}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{2}\pi^{2},\\
1+\frac{1}{2^{4}}+\frac{1}{3^{4}}+\frac{1}{4^{4}}+\frac{1}{5^{4}}+\text{etc.}&=\frac{2^{3}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{1}{6}\pi^{4},\\
1+\frac{1}{2^{6}}+\frac{1}{3^{6}}+\frac{1}{4^{6}}+\frac{1}{5^{6}}+\text{etc.}&=\frac{2^{5}}{1\cdot2\cdot3\cdots7}\cdot\frac{1}{6}\pi^{6},\\
1+\frac{1}{2^{8}}+\frac{1}{3^{8}}+\frac{1}{4^{8}}+\frac{1}{5^{8}}+\text{etc.}&=\frac{2^{7}}{1\cdot2\cdot3\cdots9}\cdot\frac{3}{10}\pi^{8},\\
1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\text{etc.}&=\frac{2^{9}}{1\cdot2\cdot3\cdots11}\cdot\frac{5}{6}\pi^{10},\\
1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\text{etc.}&=\frac{2^{11}}{1\cdot2\cdot3\cdots11}\cdot\frac{691}{210}\pi^{12},\\
1+\frac{1}{2^{14}}+\frac{1}{3^{14}}+\frac{1}{4^{14}}+\frac{1}{5^{14}}+\text{etc.}&=\frac{2^{13}}{1\cdot2\cdot3\cdots15}\cdot\frac{35}{2}\pi^{14},\\
1+\frac{1}{2^{16}}+\frac{1}{3^{16}}+\frac{1}{4^{16}}+\frac{1}{5^{16}}+\text{etc.}&=\frac{2^{15}}{1\cdot2\cdot3\cdots17}\cdot\frac{3617}{30}\pi^{16},\\
1+\frac{1}{2^{18}}+\frac{1}{3^{18}}+\frac{1}{4^{18}}+\frac{1}{5^{18}}+\text{etc.}&=\frac{2^{17}}{1\cdot2\cdot3\cdots19}\cdot\frac{43867}{42}\pi^{18},\\
1+\frac{1}{2^{20}}+\frac{1}{3^{20}}+\frac{1}{4^{20}}+\frac{1}{5^{20}}+\text{etc.}&=\frac{2^{19}}{1\cdot2\cdot3\cdots21}\cdot\frac{1222277}{110}\pi^{20},\\
1+\frac{1}{2^{22}}+\frac{1}{3^{22}}+\frac{1}{4^{22}}+\frac{1}{5^{22}}+\text{etc.}&=\frac{2^{21}}{1\cdot2\cdot3\cdots23}\cdot\frac{854513}{6}\pi^{22},\\
1+\frac{1}{2^{24}}+\frac{1}{3^{24}}+\frac{1}{4^{24}}+\frac{1}{5^{24}}+\text{etc.}&=\frac{2^{23}}{1\cdot2\cdot3\cdots25}\cdot\frac{1181820455}{546}\pi^{24},\\
1+\frac{1}{2^{26}}+\frac{1}{3^{26}}+\frac{1}{4^{26}}+\frac{1}{5^{26}}+\text{etc.}&=\frac{2^{25}}{1\cdot2\cdot3\cdots27}\cdot\frac{76977927}{2}\pi^{26}.
\end{aligned}
$$

Das Gesetz, welchem diese Ausdrücke folgen, ist zum Teil dermaßen ersichtlich, dass es keiner Erklärung bedarf. Die einzige Schwierigkeit, welche sich hier auftut, findet sich bei den Brüchen, welche sind:

$$\frac{1}{2},\quad\frac{1}{6},\quad\frac{1}{6},\quad\frac{3}{10},\quad\frac{5}{6},\quad\frac{691}{210},\quad\frac{35}{2}\quad\text{etc.},$$

aber ich habe schon zwei Methoden angegeben, um diese Brüche sogar noch weiter fortzusetzen.